

1.4.6 Negace složených výroků I

Předpoklady: 010405

Pedagogická poznámka: Dlouho jsem se v počátcích své praxe snažil probrat negace za jednu hodinu. Tvorba negací je skvělým procvičováním schopnosti dodržovat pravidla. Je však nutný dostatek času na samostatnou tvorbu negací. Pokud spěcháte, bude možná lepší pouze probrat formule a samostatné sestavování do písemky nedávat.

Pedagogická poznámka: Snažím se hodinu dělit na 25 minut pro negaci konjunkce a 20 minut pro negaci disjunkce.

Negace: Výrok s opačnou pravdivostní hodnotou, snažíme se nepoužívat ne (musíme pak pokrýt všechny zbývající možnosti).

Zkusíme pomocí formální logiky najít obecná pravidla na negování složených výroků (abychom nemuseli každý složený výrok komplikovaně zkoumat a ujišťovat se, že jsme negovali správně).

Negace konjunkce

Nejdříve z tabulky pravdivostních hodnot zjistíme, jaké vlastnosti negace konjunkce má.

Př. 1: Doplně následující tabulku pravdivostních hodnot výroků.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci konjunkce. Zápis $\neg(a \wedge b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).

Sloupec negací má tři 1 a jednu 0 \Rightarrow nemůže to být konjunkce (poměr 1 a 0 má obrácený) \Rightarrow musí to být disjunkce (nebo implikace) nějakých výroků (tyto typy složených výroků mají ve sloupci tři 1 a jednu 0) \Rightarrow zkusíme disjunci $() \vee ()$.

Hledáme, co dosadit do závorek.

První řádek: Disjunkce $() \vee ()$ je nepravdivá \Rightarrow musíme ji složit ze dvou nepravdivých výroků (platí $0 \vee 0 = 0$) \Rightarrow výroky a i b jsou pravdivé \Rightarrow místo nich použijeme jejich negace (abychom měli dvě 0).

Zřejmě platí, že negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \vee \neg b$.

Poznámka: Že musíme použít místo výroků a, b jejich negace, je jasné také z prvního řádku tabulky. Do negace potřebujeme dva nepravdivé výroky, potřebné dvě nuly jsou ve sloupcích $\neg a$ a $\neg b$.

Př. 2: Doplně předchozí tabulku o sloupec pro výrok $\neg a \vee \neg b$ a porovnáním se sloupcem pro výrok $\neg(a \wedge b)$ ověř, že negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \vee \neg b$.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Hypotéza se potvrdila \Rightarrow **negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \vee \neg b$.**

Logické: Původní výrok vyžaduje splnit obě podmínky, když poruším jednu **nebo** druhou, je výrok nepravdivý.

V této a následující hodině nebudeme trvat na tom, aby se v negacích jednotlivých výroků nevyskytovaly zápory.

Př. 3: Zneguj výrok: „Sedím v lavici a počítám.“

Dva výroky:

a : Sedím v lavici.

b : Počítám.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Nesedím v lavici nebo nepočítám.

Př. 4: Zneguj výroky. Urči jejich pravdivostní hodnotu.

a) " $\sqrt{2}$ je větší než 1 a menší než 2."

b) „Číslo dělitelné šesti je dělitelné třemi a dvěma.“

c) "Operace odčítání není komutativní ani uzavřená na množině celých čísel."

a) " $\sqrt{2}$ je větší než 1 a menší než 2." - pravdivý výrok

Dva výroky:

a : $\sqrt{2}$ je větší než 1.

b : $\sqrt{2}$ je menší než 2.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

$\sqrt{2}$ není větší než 1 nebo není menší než 2. - nepravdivý výrok

b) „Číslo dělitelné šesti je dělitelné třemi a dvěma.“ - pravdivý výrok

Dva výroky:

a: Číslo dělitelné šesti je dělitelné třemi.

b: Číslo dělitelné šesti je dělitelné dvěma.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Číslo dělitelné šesti není dělitelné třemi nebo dvěma. - nepravdivý výrok

c) "Operace odčítání není komutativní ani uzavřená na množině celých čísel." - nepravdivý výrok

Dva výroky:

a: Operace odčítání není komutativní na množině celých čísel.

b: Operace odčítání není uzavřená na množině celých čísel.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Operace odčítání je komutativní nebo je uzavřená na množině celých čísel. - pravdivý výrok

Pedagogická poznámka: V bodě b) se občas objevuje negování začátku věty: "Číslo nedělitelné ...

Př. 5: Zneguj výroky.

a) „Dnes je pátek 4. 11. 2011.“

b) „Ideální manžel myje nádobí a nechrápe.“

c) „Kočka leze dírou, pes oknem.“

a)

Dva výroky:

a: Dnes je pátek.

b: Dnes je 4. 11. 2011.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Dnes není pátek nebo není 4. 11. 2011.

b)

Dva výroky:

a: Ideální manžel myje nádobí.

b: Ideální manžel nechrápe.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Ideální manžel nemyje nádobí nebo chrápe.

c)

Dva výroky:

a: Kočka leze dírou.

b: Pes leze oknem.

Výrok má tvar $a \wedge b$, znegujeme na $\neg a \vee \neg b$.

Kočka neleze dírou nebo pes neleze oknem.

Pedagogická poznámka: V bodě b) má část žáků problém s tím, že už v zadání se vyskytuje zápor, který automaticky přenáší do výsledku (ideální manžel nemyje nádobí a nechrápe).

Negace disjunkce

Př. 6: Doplně následující tabulku pravdivostních hodnot výroků. S pomocí tabulky hledej negaci disjunkce. Odhad potvrď doplněním tabulky o další sloupec a jeho vyplněním.

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

Hledáme jiný způsob, jak napsat negaci disjunkce. Zápis $\neg(a \vee b)$ znamená pouze přidání záporu před původní výrok.

Pravdivostní hodnoty hledaného výroku známe (čtvrtý sloupec je negací třetího).

Sloupec negací má tři 0 a jednu 1 \Rightarrow nemůže to být disjunkce (poměr 1 a 0 má obrácený) \Rightarrow musí to být konjunkce dvou výroků (tento výrok má tři 0 a jednu 1) \Rightarrow zkusíme konjunkci $() \wedge ()$.

Hledáme, co dosadit do závorek:

Čtvrtý řádek: konjunkce $() \wedge ()$ je pravdivá \Rightarrow musíme ji složit ze dvou pravdivých výroků (platí $1 \wedge 1 = 1$) \Rightarrow výroky a i b jsou nepravdivé \Rightarrow místo nich použijí jejich negace (abychom měli dvě 1).

Zřejmě platí, že negací výroku $a \wedge b$ je výrok $\neg a \wedge \neg b$.

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Odhad se ukázal jako správný.

Negací výroku $a \vee b$ je výrok $\neg a \wedge \neg b$

Logické: K pravdivosti původního výroku stačí splnit jednu nebo druhou podmínku, jedině když porušíme první **a zároveň** druhou podmínku, je výrok nepravdivý.

Dodatek: Skutečnost, že disjunkce s konjunkcí se negují jedna na druhou je ukázkou velmi časté matematické tendence k symetrii (a ukázkou toho, co vidoucí označují jako matematickou krásu).

Př. 7: Neguj výrok: "Přirozené číslo je sudé nebo liché."

Dva výroky:

a : Přirozené číslo je sudé.

b : Přirozené číslo je liché.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Přirozené číslo není ani sudé ani liché.

Př. 8: Neguj výroky. Urči jejich pravdivostní hodnotu.

a) „Nezáporné číslo je nula nebo číslo kladné.“

b) "Dvě různé přímky v rovině mají jeden nebo žádný společný bod."

c) „Do sjednocení množin A a B náleží prvky, které náleží do množiny A nebo do množiny B .“

a) „Nezáporné číslo je nula nebo číslo kladné.“ - pravdivý výrok

Dva výroky:

a : Nezáporné číslo je nula.

b : Nezáporné číslo je číslo kladné.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Nezáporné číslo není ani nula ani číslo kladné. - nepravdivý výrok

b) " Dvě různé přímky v rovině mají jeden nebo žádný společný bod." - pravdivý výrok

Dva výroky:

a : Dvě různé přímky v rovině mají jeden společný bod.

b : Dvě různé přímky v rovině mají žádný společný bod.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Dvě různé přímky v rovině nemají jeden ani žádný společný bod.. - nepravdivý výrok

c) „Do sjednocení množin A a B náleží prvky, které náleží do množiny A nebo do množiny B .“ - pravdivý výrok

Dva výroky:

a : Do sjednocení množin A a B náleží prvky, které náleží do množiny A .

b : Do sjednocení množin A a B náleží prvky, které náleží do množiny A .

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Do sjednocení množin A a B náleží prvky, které nenáleží do množiny A ani do množiny B . - nepravdivý výrok

Př. 9: Neguj výroky.

a) „Dneska půjdu odpoledne ven nebo se budu učit.“

b) „Všechno nebo nic.“

c) „Peníze nebo život.“

a)

Dva výroky:

a : Dneska půjdu odpoledne ven.

b : Dneska se budu odpoledne učit.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Dneska odpoledne nepůjdu ven a nebudu se učit.

b)

Dva výroky:

a : Všechno.

b : Nic.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Ani všechno, ani nic.

c)

Dva výroky:

a : Peníze.

b : Život.

Výrok má tvar $a \vee b$, znegujeme na $\neg a \wedge \neg b$.

Ani peníze, ani život.

Př. 10: Petáková:

strana 11/cvičení 10 a), b)

strana 11/cvičení 11 a), b)

Shrnutí: Konjunkce se neguje na disjunkci negací, disjunkce na konjunkci negací.